

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АЛЕКСАНДРОВА К РАЗВЕРТКАМ  
ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МОЛЕКУЛ  
C<sub>1</sub>-C<sub>2</sub> – УГЛЕВОДОРОДОВ

М.С.САЛАХОВ\*, А.М.МАГЕРРАМОВ\*\*,  
Б.Т. БАГМАНОВ\*\*, О.Т. ГРЕЧКИНА\*\*

e-mail:salahov\_mustafa@mail.ru

\*Институт Полимерных Материалов НАН Азербайджана

\*\*Бакинский Государственный Университет

*В статье впервые применена теорема Александра к разверткам тетраэдрических моделей метана, ацетилен и этилена, и показаны их математические свойства.*

В наших ранних работах [1,2] были описаны тетраэдрические модели молекул метана(CH<sub>4</sub>), этана (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>), этилена (C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>), ацетилен (C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>) и их развертки.

В данной статье впервые рассматриваются некоторые математические свойства разверток тетраэдрических моделей молекул метана, ацетилен и этилена.

Существуют три метода построения развертки многоугольных поверхностей: 1) метод треугольника (триангуляции), 2) метод нормального сечения, 3) метод раскатки.[3]

Установлено, что любая развертка выпуклого многогранника должна удовлетворять теореме Александра о развертке. Из всякой развёртки можно склеить выпуклый многогранник: 1) когда Эйлера характеристика развертки равна 2; 2) сумма углов, подходящих к любой вершине развёртки, не превосходит 2π. [4]

Если вершине развертки соответствует вершина многогранника, то сумма подходящих углов строго меньше 2π, а если вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π.

Эйлера характеристика развертки определяется аналогично Эйлеровой формуле многогранника

$$\chi = V - P + G, \text{ где}$$

G - число многоугольников развёртки,

P- число сторон многоугольников, где каждые две соединяемые между собой стороны считаются за одну,

V- число вершин развертки, из которых совпадающие при образовании многогранника вершины считаются за одну.[4]

Нами впервые осуществлена попытка применения теоремы Александра к разверткам тетраэдрической модели метана(CH<sub>4</sub>) (рис.1) и ацетилен (C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>) (рис.2).

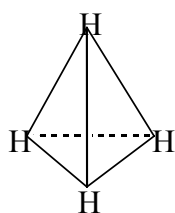


Рис. 1. Тетраэдрическая модель метана

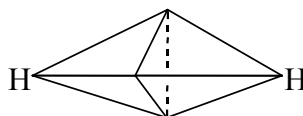


Рис.2. Тетраэдрическая модель ацетилена

Существуют две развертки тетраэдра, построенные методом триангуляции (рис.3а,б).

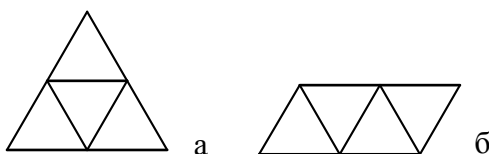


Рис.3. Развертки тетраэдра

Подсчитаем Эйлеровую характеристику для развертки 3а (рис. 4а):

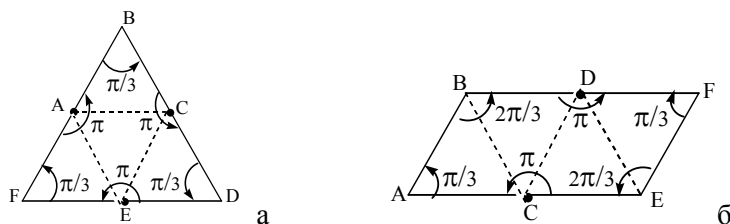


Рис.4 Вершины и углы разверток тетраэдрической модели метана

Так как вершины B, F и D совпадают при образовании тетраэдра и считаются за одну, то  $V=4$ , а у развертки три стороны FB, BD и FD, то  $P=3$  и  $\Gamma=1$ . Получаем  $\chi=4-3+1=2$ .

Для развертки 3б (рис.4б) вершина A совпадает с вершиной E, а вершина B – с вершиной F, и считаются за одну, следовательно  $V=4$ . Так как у развертки четыре стороны и сторона AB совпадает со стороной FE и считаются за одну, то  $P=3$ .  $\Gamma=1$ . Получаем  $\chi=4-3+1=2$ .

Как видно из рис.4а и рис.4б сумма углов, подходящих к любой вершине разверток (рис.3а,б), строго меньше  $2\pi$  и каждой вершине развертки соответствует истинная вершина многогранника.

Применение теоремы Александра к возможным восьми разверткам (рис.5а-н) тетраэдрической модели ацетилена ( $C_2H_2$ ) (рис.2) [1], построенных методом триангуляции, показывает, что в случае развертки 5а(рис.6а) вершина B совпадает с вершиной F и считается за одну, вершина A – с вершиной N, вершина M – с вершиной C и  $V=5$ ,  $P=4$ ,  $\Gamma=1$ : Получаем  $\chi=5-4+1=2$ .

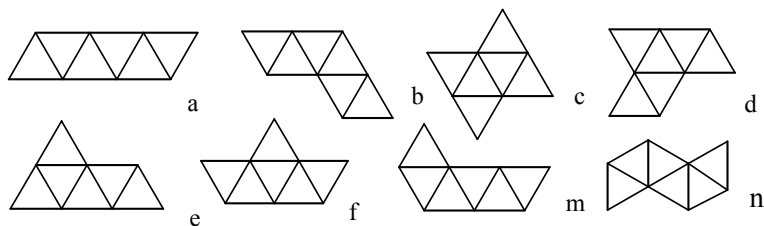


Рис.5. Развертки тетраэдрической модели ацетилена

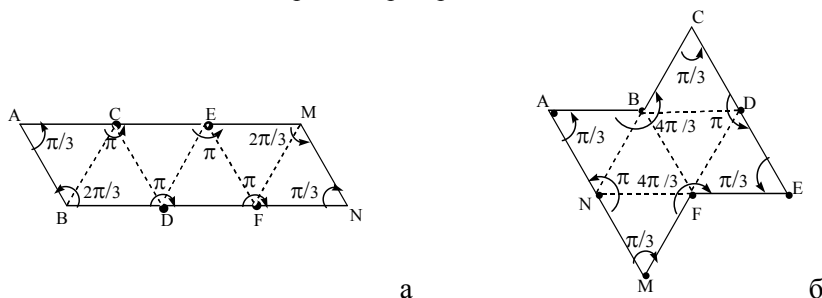


Рис.6. Вершины и углы разверток тетраэдрической модели ацетилена

В случае развертки 5с (рис.6с) вершины А, С, Е и М совпадают и считаются за одну, следовательно  $V=5$ . В этом случае сторона АВ совпадает со стороной ВС и считаются за одну, сторона FE – со стороной FM, следовательно  $P=4$ ,  $\Gamma=1$ : Получаем  $\chi=5-4+1=2$ .

Из рис.6а и рис.6с видно, что сумма углов, подходящих к любой вершине разверток (рис.6а, с), строго меньше  $2\pi$ , т.к. каждой вершине развертки соответствует истинная вершина многогранника.

Таким образом, показано (табл.1), что Эйлера характеристика всех восьми конфигураций (рис.5а-п) равна двум.

Таблица 1

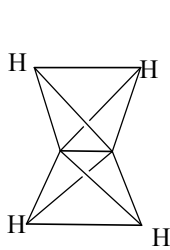
Значения  $V, P, \Gamma$  и  $\chi$  для разверток тетраэдрической модели ацетилена

№	Вид развертки	V	P	$\Gamma$	$\chi$
1		5	4	1	2
2		5	4	1	2

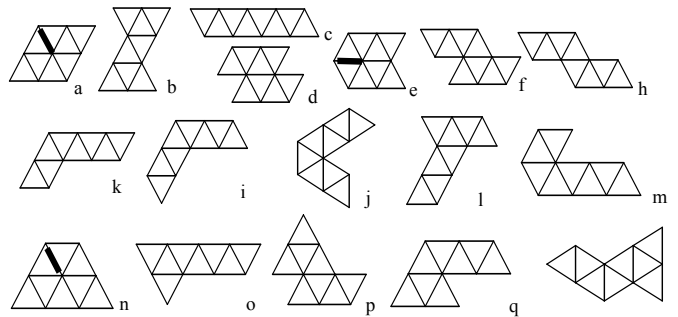
3		5	4	1	2
4		5	4	1	2
5		5	4	1	2
6		5	4	1	2
7		5	4	1	2
8		5	6	1	2

Мы применили теорему Александра к разверткам тетраэдрических моделей метана и ацетилена, т.к. эти модели являются выпуклыми многогранниками.

Ранее мы показали [1], что существует семнадцать возможных разверток построенных методом триангуляции (рис.8) битетраэдрической модели этилена ( $C_2H_4$ ), являющейся невыпуклым многогранником (рис.7), поэтому мы не можем применить теорему Александра к ее разверткам.



**Рис.7.** Битетраэдрическая модель этилена



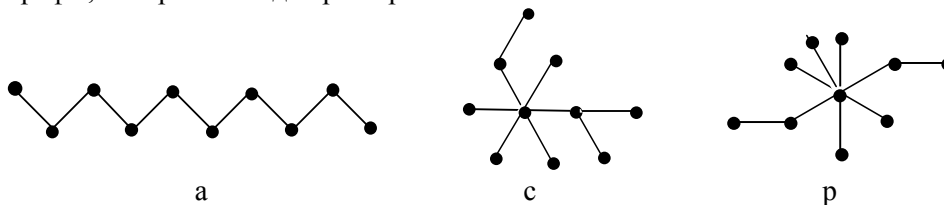
**Рис.8.** Развертки битетраэдрической модели этилена

В данном случае можно воспользоваться обобщенной теоремой Эйлера[3], т.к. Эйлера характеристика равна двум независимо от выпуклости многогранника.

Для графа, состоящего из  $V$  вершин,  $P$  рёбер,  $k$  компонентов и разбивающего плоскость (или сферу), на которой он лежит, на  $\Gamma$  областей, выполняется равенство:  $V - P + \Gamma = k + 1$ .

Развертки битетраэдрической модели этилена (рис.8) можно рассматривать как граф, состоящий из  $V$  вершин,  $P$  рёбер - отрезков, соединяющих вершины этого графа, где любые два ребра графа не пересекаются и могут иметь лишь общие вершины. Такой граф разбивает плоскость на некоторое число  $\Gamma$  областей, так что от любой точки области можно пройти к любой другой точке этой же области, не пересекая рёбра графа. Сам граф может состоять из  $k$  связанных компонентов. Связная компонента состоит из всех рёбер и вершин графа, таким образом, что любые две вершины, компоненты которых можно соединить ломаной, состоящей из ее рёбер.

Применяя обобщенную теорему Эйлера к разверткам модели этилена получим графы, построенные для разверток 8а-г.



**Рис.9.** Графы разверток 8а ,8с и 8р

Рассмотрим граф, построенный для развертки 8а (рис. 9а).

Имеем:  $V=10$ ,  $P=9$ ,  $\Gamma=1$ ,  $k=1$ .Имеет место равенство:  $10-9+1=1+1$ .

Построив граф, соответствующий развертке 8с (рис.9с), получим:  $V=10$ ,  $P=9$ ,  $\Gamma=1$ ,  $k=1$ .

В этом случае имеет место равенство:  $10-9+1=1+1$ .

Для графа, соответствующего развертке 8р (рис.9р), получаем:

$V=10$ ,  $P=9$ ,  $\Gamma=1$ ,  $k=1$ .Получим :  $10-9+1=1+1$

В таблице 2 даны значения В, Р, Г и к для всех возможных разверток битетраэдрической модели этилена.

Таблица 2

Значения В,Р, Г и к для разверток битетраэдрической модели этилена

№	Тип развертки	граф	В	Р	Г	к
1			10	9	1	1
2			10	9	1	1
3			10	9	1	1
4			10	9	1	1
5			10	9	1	1
6			10	9	1	1
7			10	9	1	1
8			10	9	1	1
9			10	9	1	1
10			10	9	1	1
11			10	9	1	1
12			10	9	1	1
13			10	9	1	1

14			10	9	1	1
15			10	9	1	1
16			10	9	1	1
17			10	9	1	1

Таким образом, мы показали, что Эйлерова характеристика битетраэдрической модели этилена равна 2.

Мы рассмотрели возможные развертки моделей молекул метана, ацетилена и этилена. Задача определения по развертке, если она имеет более четырех настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше  $2\pi$ ), истинная она или нет, является сложной задачей, которую можно решить только эмпирически.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Salahov M.S. və s. « $C_n$  –karbohidrogenləri, onların quruluşu, qrafiki təsvirləri və nomenklaturası» // Kimya məktəbdə, Bakı, 2005, №1(09), s.33-44.
2. Salahov M.S. və s. « $C_n$  –karbohidrogenləri, onların quruluşu, qrafiki təsvirləri və nomenklaturası. 4.Propadiyen molekulunun açılışları» // Kimya məktəbdə, (çapda).
3. Долбилин Н.П. Жемчужины теории многогранников. Московский Центр Непрерывного Математического Образования, 2000, с.32-38.
4. Долбилин Н.П. Три теоремы о выпуклых многогранниках. Квант, 2001, №6, с.7-12.

#### **$C_1$ - $C_2$ – KARBONİDROGENLƏRİ TETRAEDRİK MOLEKUL MODELƏRİN AÇILIŞLARINA ALEKSANDROV TEOREMİNİN TƏTBİQİ**

**M.S.SALAHOV, A.M.MƏHƏRRƏMOV, B.T.BAĞMANOV, O.T.QREÇKİNA**

#### XÜLASƏ

Məqalədə ilk dəfə olaraq Aleksandrov teoreminin tətbiqi ilə metan, asetilen və etilen molekullarının tetraedrik modelləri açılışlarının riyazi xassələri öyrənilmişdir.

#### **USE OF ALEKSANDROV THEOREM TO EVOLVENTS OF TETRAEDRIC MODELS OF MOLECULES $C_1$ - $C_2$ -HYDROCARBONS**

**M.S.SALAKHOV, A.M.MAHARRAMOV, B.T.BAGMANOV, O.T.GRECHKINA**

#### SUMMARY

In the paper Aleksandrov theorem to evolvents of tetrahedric models of methane, acetylene and ethylene has been firstly used and their mathematical properties have been shown.